牛顿微积分基本定理

1696 年，牛顿在他所著的小册子《运用无穷多项方程的分析学》中不仅给出了求变化率的普遍方法，而且证明了微积分基本定理. 从计算角度来说，他实际上给出了两个基本的求导和积分公式，用现代符号表示为：$(ax^m)'=max^{m-1}$；$\int ax^m dx=\dfrac{ax^{m+1}}{m+1}$. 牛顿还给出了函数之和的积分等于各函数积分的和的法则，在此基础上给出了无穷级数进行分项积分的方法，他已意识到级数收敛和发散的区别，但没有提出收敛的概念. 例如：已知如图 5-1 一条曲线 y，曲线下的面积为 z，且 $z=ax^m$. (1)

x 变化，得到无穷小量“o”，牛顿称为“瞬”，则 z 的增量为

$$z+oy=a(x+o)^m=a\left(x^m+mox^{m-1}+\frac{m(m-1)}{2}o^2x^{m-2}+\cdots+o^m\right). \tag{2}$$

(2)−(1)得

$$oy=a\left(mox^{m-1}+\frac{m(m-1)}{2}o^2x^{m-2}+\cdots+o^m\right). \tag{3}$$

(3)除以无穷小量 o，得

$$y=a\left(mx^{m-1}+\frac{m(m-1)}{2}ox^{m-2}+\cdots+o^{m-1}\right). \tag{4}$$

在(4)中舍去含有无穷小增量 o 的项，得

$$y=amx^{m-1}. \tag{5}$$

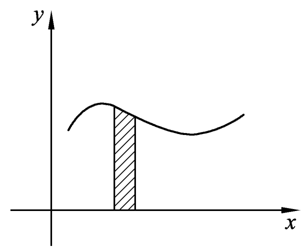

图 5-1

(5)式说明，面积在 x 点的变化率是曲线在 x 处的 y 的值，反之，如果曲线是 $y=amx^{m-1}$，那么，在它下面的面积是 $z=ax^m$. 这也说明求面积与求它的变化率的过程是可逆的. 这是微积分的基本定理.