

三大数学学派的历史争论

在1940年第二届国际数学家会议上,当时数学界的领袖人物庞加莱宣布:“现在我们可以说,数学的完全严格性已经达到了。”但是,这位数学权威的话音刚落,就爆发了极为深刻的、震撼整个数学大厦的第三次数学危机,从而导致了一场由许多数学家卷入的关于数学基础的哲学论战。1902年,罗素发现的悖论真正强烈地引起了数学家的恐慌。罗素悖论不仅触及集合论这一数学基础,而且也触动了逻辑学,因而使数学家和逻辑学家同时发出惊呼:数学基础发生危机了!

但是,要解决这两个问题,首先遇到的不是技术性的问题,而是如何看待数学的真理性和无穷的问题,然后才能从具体技术入手去解决它。对这两个问题的不同认识就产生了不同的哲学观点,而在不同哲学观点支配下就产生不同的逻辑解决方法。这两方面结合在一起就在数学史上构成了三个不同的数学基础研究学派:逻辑主义、直觉主义和形式主义。三派之间的热烈辩论成为现代数学史上著名的数学基础大论战。他们从各自的哲学观点出发,对悖论引起的数学危机,从概念的准确性、提法的严密性、推理的合理性等方面一一加以审查,对数学的本质、数学对象的存在性、数学的真理性以及数学有关的逻辑问题等进行哲学思考。

1. 逻辑主义研究学派

最早出现的是以罗素为代表的逻辑主义,它强调逻辑而排斥直觉,主张逻辑是整个数学的唯一基础。以罗素为代表的逻辑主义学派认为,数学是由逻辑派生出来的,即数学与经验事实无关,而是先验地从逻辑公理系统演绎出来的。依此,数学变成纯逻辑的产物。显然,这种观点与数学渊源于客观实际是背道而驰的,所以说逻辑主义从哲学和认识论的观点来看,其出发点带有唯心主义的色彩。

逻辑主义者企图从一个逻辑公理系统中演绎出整个数学是不可能的。尽管他们做了大量的工作,然而他们从自己设计出来的所谓纯逻辑公理系统的基础上进行逻辑演绎推理时,却“暗地里”利用了集合论中的无穷公理和选择公理,而这两个公理并非逻辑公理。给逻辑主义以致命打击的是哥德尔的不完备性定理,它证明了从逻辑并不能推出算术的正确性来,因而宣告了把数学全部归结为逻辑的企图是不可能的。

但是,以罗素为代表的逻辑主义学派的历史功绩是不可磨灭的。他们为现代数理逻辑奠定了基础。而符号逻辑的公理化,揭示了数学与逻辑之间的关系,对于当今计算机的研制和人工智能的研究具有巨大现实意义。

2. 直觉主义研究学派

继之而起的是以布劳威尔为代表的直觉主义,它强调直觉而排斥逻辑,主张直觉才是数学的唯一基础.该学派对整个数学发展有不利因素:其一,直觉主义者认为先数学而后逻辑,逻辑只不过是数学的一个分支和论证手段之一.他们和逻辑主义者都不承认数学研究的对象渊源于客观实际,因此他们的观点也是属于唯心主义流派.其二,整个直觉主义运动,是从对经典数学的顽强的哲学开始的.他们认为经典数学是形而上学.正因为如此,直觉主义付出了巨大的代价.在数学方面丢失了许多的经典成果.

直觉主义者强调可构造性或可行性对现代递归函数论的建立和发展起了很大的推动作用,特别是对计算机数学的发展意义更大.直觉主义逻辑仍将是数理逻辑研究中的一个重要课题,只是它已经输入了辨证的新时代精神而继续对数学进行哲学思考.

3. 形式主义研究学派

最后兴起的是以希尔伯特为代表的形式主义,认为逻辑具有先验的真理性以及数学整个地具有逻辑的特征,主张通过逻辑的相容性即无矛盾性来维护数学的真理性和合法性.希尔伯特是反对直觉主义最有力的形式主义学派的领导人,而且是当之无愧的最伟大的现代数学家.在1899年至1931年发表的十几部著作中,他提出了大部分形式主义观点.首先,希尔伯特一方面要尽量地保留经典数学中的基本概念、方法和逻辑推演规则,特别是涉及到有关无限概念的逻辑演绎规则.另一方面,又为了保证所有数学证明的可靠性及整个数学大厦的纯洁性,把数学分为“真实数学”和“理想数学”两大类.凡是涉及到有限概念和有限集合的数学称为真实数学,而涉及到无限概念和超穷方法的数学系统称为理想数学.其次,形式主义者把数学的真理性归结为逻辑的无矛盾性是有其片面性的.因为满足逻辑无矛盾的公理系统不一定是真理,它仅是发展数学和验证数学真假性的必要条件,而非充分条件.

尽管形式主义者忽视了数学渊源于实际,而且片面地夸大了逻辑对数学的作用,然而形式主义学派对20世纪的数学进展却起了很大的推动作用,特别是对数学基础理论的研究.在“元数学”这个领域内的工作大大改进了数学家们对数学推理本质的理解,把形式公理学向前推进了一大步,从而成为公理学发展史上最重要的转折点,标志着数学的发展进入了研究形式系统的新阶段.现在,元数学已发展成为数理逻辑四大分支之一,它提出的可判定性问题导致可计算性和一种算法概念的确定.由希尔伯特及其使之精确化的形式数学语言,奠定了构造算法语言的基础.

总述:

在逻辑主义、直觉主义、形式主义三大学派为了数学基础问题展开的这场激烈的大论战中,一方面各有其局限性,另一方面也各有其创见,而且通过激烈的辩论,在一定程度上起到了互相借鉴与互相促进的作用.所以,通过这场论战,尽管数学基础问题尚未得到彻底解决,但各个学派得到了不同程度的发展,而且对整个数学的发展也起到了推动作用.由此可见,允许不同的数学观点和学派的存在和争论,对数学的发展是有益的.

当今的数学家已不再明显地划分为三派,但是观点上的倾向性还是存在的.一般说来,多数人对历史上的三派能够取扬长补短的态度,继承各派的合理成分.