

埃及分数问题

在古埃及,由于人们缺乏对分数的认识,只使用分子为1的分数,对分子不为1的分数用几个分子为1,分母不同的分数之和来表示.例如 $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$, $\frac{7}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{24}$.这种分子为1

的分数称之为古埃及分数.在古埃及,人们就使用单位分数的和(形如 $\frac{1}{a}$ 的, a 是自然数)表示一切有理数.

如: $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$,但不允许 $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$,因为加数中有相同的.

1. 一个分数 $\frac{a}{b}$,表示方法有很多种,但是哪种最好呢?

首先,加数少的比加数多的好;其次,加数个数相同的,最小的分数越大越好.如:

$$\frac{19}{45} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{180},$$

$$\frac{19}{45} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{45},$$

$$\frac{19}{45} = \frac{1}{3} + \frac{1}{18} + \frac{1}{30},$$

$$\frac{19}{45} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{180},$$

$$\frac{19}{45} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18}.$$

最好的是最后一种,因为 $\frac{1}{18}$ 比 $\frac{1}{180}$, $\frac{1}{45}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{180}$ 都大.

2. 一个埃及分数可以写成任意个不相等的埃及分数的和.

将一个分子为1的真分数分解为两个或两个以上分子为1的真分数之和,称为埃及分数的分解.

首先我们看一下将 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$ 作埃及分数分解,即一个埃及分数变为两个埃及分数之和的结果.事实上一个埃及分数可以写成任意个不相等的埃及分数的和.

我们可以利用公式: $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$ 来作.

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12},$$

$$\text{由于 } \frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{20},$$

$$\text{所以 } \frac{1}{3} = \frac{1}{5} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20},$$

$$\text{再进一步, } \frac{1}{5} = \frac{1}{6} + \frac{1}{30},$$

$$\text{所以, } \frac{1}{3} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30}.$$

可以看出, $\frac{1}{3}$ 可以写成任意多个不相等的埃及分数的和.

3. 用几个自然数组成倒数和为 1 的问题.

用几个自然数组成倒数和为 1 的类型题目, 是埃及分数的一个重要应用. 例如: 用 20 以内 (包括 20) 的五个自然数组成倒数和为 1.

我们可以缩小自然数范围命题, 即“用 15 以内的五个自然数组成倒数和为 1”. 我们还可以用逆向思维, 扩大自然数组成数命题, 比如: 用 20 以内 (包括 20) 的六个自然数组成倒数和为 1.

已知用 20 以内 (包括 20) 的五个自然数组成倒数和为 1 的式子是: $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20}$. 再将 $\frac{1}{6}$ 拆成 $\frac{1}{10} + \frac{1}{15}$, 有 $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \frac{1}{20}$.

如果是用 20 以内 (包括 20) 的七个自然数组成倒数和为 1 呢?

同样地, 我们已经知道, 用 20 以内 (包括 20) 的六个自然数组成倒数和为 1 的式子是: $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \frac{1}{20}$. 再将 $\frac{1}{2}$ 拆成 $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$, 有 $1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \frac{1}{20}$.

用 20 以内 (包括 20) 的八个自然数组成倒数和为 1.

同样地, 用 20 以内 (包括 20) 的七个自然数组成倒数和为 1 的式子是: $1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \frac{1}{20}$. 再将 $\frac{1}{6}$ 拆成 $\frac{1}{9} + \frac{1}{18}$, 有 $1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \frac{1}{18} + \frac{1}{20}$.

这样做下去, 将有很多. 在 N 个自然数组成倒数和为 1 中, 已知一部分自然数, 求另一部分自然数, 是难度较大的一类题目.