

插值法与“招差术”

招差术即高次内插法,是现代计算数学中一种常用的插值方法.插值算法在微积分的酝酿过程中扮演了重要角色.在中国,内插法的产生与历法有关,早从东汉时期起,学者们就惯用插值法来推算日月五星的运动.起初是简单的一次内插法,从南北朝到隋朝,历法不断改进,公元600年,隋朝天文学家刘焯,在他的著作《皇极历》中,发明了相当于现代“等间距二次内插法”的刘焯公式:

$$f(nl+s)=f(nl)+\frac{s}{l}\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}+\frac{s}{l}(\Delta_1-\Delta_2)-\frac{s^2}{2l^2}(\Delta_1-\Delta_2).$$

后来,唐朝天文学家僧一行造《大衍历法》,在刘焯内插公式基础上,创立了自变量“不等间距二次内插法”:

$$f(t+s)=f(t)+s\frac{\Delta_1+\Delta_2}{t_1+t_2}+s\left(\frac{\Delta_1}{l_1}-\frac{\Delta_2}{l_2}\right)-\frac{s^2}{l_1+l_2}\left(\frac{\Delta_1}{l_1}-\frac{\Delta_2}{l_2}\right).$$

刘焯的二次内插法比著名的牛顿内插公式早约 1 000 年.

元代天文学家和数学家王恂、郭守敬在其编制的《授时历》中,为精确推算日月五星运行的速度和位置,根据“平、定、立”三差,创用三次内插公式,这在数学上是重要的创新,同时也把天文历法的计算工作推进了一大步.朱世杰对于这类插值问题作了更深入的研究.他在《四元玉鉴》中成功地把高阶等差级数方面的研究成果运用于内插法,提出了招差公式: $f(n)=n\Delta+\frac{1}{2!}$

$$n(n-1)\Delta^2+\frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)\Delta^3+\frac{1}{4!}n(n-1)(n-2)(n-3)\Delta^4,$$

并且明确指出公式中各项系数恰好是 $p=1,2,3,\cdots$ 时的三角垛求和公式.上述插值公式,在中国数学史上一般称为“招差术”,其用途并不仅仅限于内插法.招差术与垛积术是密切相关的,这两者可以互相推演.朱世杰掌握了三角垛公式,因而易于推导出一般的内插公式.相反地,利用招差术,也可解决高阶等差级数的求和问题.因此,朱世杰的垛积招差术,将宋元数学家在这方面的研究成果推进到了更加完善的地步.在欧洲,对招差术首先加以讨论的是英国数学家 J. 格雷戈里(J. Gregory, 1670).此后不久,牛顿得到了现在通称牛顿插值公式的一般结果.牛顿插值公式在现代数学和天文学计算中仍然起着重要的作用.朱世杰所发现的公式与牛顿插值公式在形式上和实质上都是完全一致的,而后者要晚三百多年.招差术的创立、发展和应用是中国数学史和天文学史上具有世界意义的重大成就.

朱世杰在《四元玉鉴》中也是用招差术来解决高阶等差级数的求和问题,如他在《四元玉鉴》“如象招数”问,计算招兵数目求得上差 Δ 、二差 Δ^2 、三差 Δ^3 ,下差 Δ^4 后,使用了招差公式.

本题是:“今有官司依立方招兵,初日招方面三尺,次日招方面较多一尺……已招二万三千四百人……问招来几日?”

这里,第一日招兵 $3^3=27$ 人,第二日招兵 $4^3=64$ 人,第三日招兵 $5^3=125$ 人,等等,问几日共招到 23 400 人?

朱世杰用招差术算出 $f(x)=(x+2)^3$ 的逐差表:

$$f(1) \quad f(2) \quad f(3) \quad f(4) \quad f(5) \quad f(6)$$

$$27 \quad 64 \quad 125 \quad 216 \quad 243 \quad 512$$

$$37 \quad 61 \quad 91 \quad 127 \quad 169$$

$$24 \quad 30 \quad 36 \quad 42$$

$$6 \quad 6 \quad 6$$

这里 $f(1)=27, \Delta f(1)=37, \Delta^2 f(1)=24, \Delta^3 f(1)=6, \Delta^4 f(1)=0$, 因此如果第 n 日的总人数是 $f(n)$, 则我们得公式:

$$f(n)=27n+37(n,2)+24(n,3)+6(n,4)$$

现在令 $f(n)=23\ 400$, 上式就可转化成 n 的一个四次方程, 朱世杰用增乘开方法求得 $n=15$.