

第二次数学危机

大家知道,在公元前5世纪出现了数学基础的第一次灾难性危机,这就是无理数的诞生.这次危机的产生和解决大大地推动了数学的发展.

到了17世纪的后半期,出现了一崭新的数学分支——数学分析,或称微积分.它在数学领域中占据着主导地位,这种新数学的特点是,非常成功地运用了无限过程的运算,即极限运算,而其中的微分和积分这两个过程则构成了微分学和积分学的核心,并奠定了全部分析学的基础.

微积分诞生之后,数学迎来了一次空前的繁荣时期.18世纪被称为数学史上的英雄世纪.这个时期的数学家们在几乎没有逻辑支持的前提下,勇于开拓并征服了众多的科学领域.它们把微积分应用于天文学、力学、光学、热学等各个领域,并获得了丰硕的成果.人们用微分学理论发现了哈雷彗星,用积分学理论可以计算任意平面图形的面积.在数学本身它们又发展了微分方程的理论,无穷级数的理论,大大地扩展了数学研究的范围.

在微积分的发展过程中,出现了这样的局面:一方面是微积分术创立之后立即在科学技术上获得应用,从而迅速地发展;另一方面是微积分学的理论在当时是不严密的,出现了越来越多的谬论和悖论.数学的发展又遇到了深刻的令人不安的危机.例如,有时把无穷小量看作不为零的有限量而从等式两端消去,而有时却又令无穷小量为零忽略不计.由于这些矛盾,引起了数学界的极大争论.如当时爱尔兰主教、唯心主义哲学家贝克莱(1685—1753)嘲笑“无穷小量”是“已死量的幽灵”.这种由微积分的基础所引发的危机在数学史上称为第二次数学危机,而这次危机的引发与牛顿有直接的关系.

这样的悖论日益增多,数学家们在研究无穷级数的时候,作出许多错误的证明,并由此得到许多错误的结论.因此在18世纪结束之际,微积分和建立在微积分基础之上的分析的其他分支的逻辑处于一种完全混乱的状态之中.事实上,可以说微积分在基础方面的状况比17世纪更差.数学巨匠,尤其是欧拉和拉格朗日给出了不正确的逻辑基础,因为他们是权威,所以他们的错误就被其他的数学家不加批评地接受了,甚至作了进一步的发展.

进入19世纪,数学陷入了更加矛盾的境地.虽然它在描述和预测物理现象方面所取得的成就远远超出人们的预料,但是大量的数学结构没有逻辑基础,因此不能保证数学是正确无误的.历史要求给微积分以严格的基础.

第一个为补救第二次数学危机提出真正有见地的意见的是达朗贝尔.他在1754年指出,必须用可靠的理论去代替当时使用的粗糙的极限理论.但是他本人未能提供这样的理论.

直到19世纪初,出现了一批杰出的数学家,他们积极为微积分的奠基工作而努力.首先要提到的是捷克的哲学家和数学家波尔查诺,他开始将严格的论证引入到数学分析中.1816年,他在二项展开公式的证明中,明确提出了级数收敛的概念,同时对极限、连续和变量有了较深入的理解.

法国科学院的科学家柯西对微积分的理论进行了认真研究,建立了极限理论.柯西是分析学的奠基人,法国公认的多产的数学家,在数学分析和置换群理论方面做了开拓性的工作.他在1821—1823年间出版的《分析教程》和《无穷小计算讲义》是数学史上划时代的著作.在书中他给出了数学分析一系列基本概念的精确定义,然后用极限定义连续性、导数、微分、定积分和无穷级数的收敛性.后来又经过德国数学家魏尔斯特拉斯进一步的严格化,引进了精确的“ ε —

δ ' 极限定义, 直到戴德金和康托儿的工作结束. 这样, 微积分就建立在严格的极限理论的基础上了. 今天我们微积分课本中使用的定义, 基本上就是柯西的, 不过现在写得更加严格一点.