费马数

费马数是指形如 $2^{2^n}+1$ 的数，其中 n 为非零整数，一般用 F_n 来表示.

1640 年，费马提出了一个猜想，认为一切形如 $2^{2^{x-1}}+1$ 的都是素数，其中 x 是正整数. 用 n 代替 $x-1$，就是费马数：

$$F_0=3, F_1=5, F_2=17, F_3=257, F_4=65\ 537.$$

这些都是素数. 于是，费马宣称他找到了表示素数的公式. 我们把形如 $F_n=2^{2^n}+1$ 的素数

称为费马素数.事实上,F_5 及以后都不是素数:

$$F_5=2^{32}+1=4\ 294\ 967\ 297=641\times 6\ 700\ 417;$$

$$F_6=2^{64}+1=18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 617=274\ 177\times 67\ 280\ 421\ 310\ 721;$$

$$F_7=2^{128}+1=340\ 282\ 366\ 920\ 938\ 463\ 463\ 374\ 607\ 431\ 768\ 211\ 457=59\ 649\ 589\ 127\ 497\ 217\times 5\ 704\ 689\ 200\ 685\ 129\ 054\ 721.$$

如果 2^n+1 是素数,n 必须是 2 的幂.(若 $n=ab$,当 $1<a,b<n$ 及 b 是奇数,那么 $2^n+1\equiv(2^a)^b+1\equiv(-1)^b+1\equiv 0(\bmod 2^a+1)$),即是说,所有形式如 2^n+1 的素数都是费马数,而这些素数就是费马素数.费马素数只有 F_0 至 F_4 五个.有学者认为,如果一个费马数 n 是素数的话,那么可以用尺规画出正 n 边形.