

哥尼斯堡七桥问题

18 世纪,东普鲁士的首府哥尼斯堡是一座景色迷人的城市,普莱格尔河横贯城区,使这座城市锦上添花,显得更加风光旖旎.这条河有两条支流,在城中心汇成大河,在河的中央有一座美丽的小岛.河上有七座各具特色的桥把岛和河岸连接起来.每到傍晚,许多人都来此散步.人们漫步于这七座桥之间,久而久之,就形成了这样一个问题:能否一次走遍 7 座桥,而每座桥只许通过一次,最后仍回到起始地点.这就是闻名遐迩的“哥尼斯堡七桥问题”.每一个到此游玩或散心的人都想试一试,可是,对于这一看似简单的问题,没有一个人能符合要求地从七座桥上走一遍.

七桥问题也困扰着哥尼斯堡大学的学生们,在屡遭失败之后,他们给当时著名的数学家欧拉写了一封信,请他帮助解决这个问题.欧拉看完信后,对这个问题也产生了浓厚的兴趣.他想,既然岛和半岛是桥梁的连接地点,两岸陆地也是桥梁的连接地点,那就不妨把这四处地方缩小成四个点,并且把这七座桥表示成七条线.这样,原来的七桥问题就抽象概括成了如图 6-2 所示的关系图.

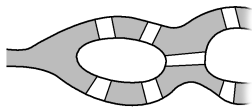


图 6-1

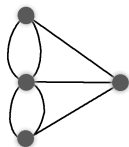


图 6-2

欧拉运用他那娴熟的变换技巧,把哥尼斯堡七桥问题变为读者所熟悉的,简单的几何图形的“一笔画”问题,即能否笔不离纸,一笔画但又不重复地画完以下的图形?

聪明的欧拉,正是在上述基础上,经过潜心研究,确立了著名的“一笔画原理”,从而成功地

解决了哥尼斯堡七桥问题. 不过, 要弄清欧拉的特有思路, 我们还得从“网络”的连通性讲起.

所谓网络, 是指某些由点和线组成的图形, 网络中的线弧都有两个端点, 而且互不相交. 如果一个网络中的任意两点, 都可以找到网络中的某条弧线, 把它们连接起来, 那么, 这样的网络就称为连通的. 连通的网络简称脉络. 七桥问题的图形, 则不仅是网络, 而且是脉络!

网络的点如果有奇数条的弧线交汇于它, 这样的点称为奇点. 反之, 称为偶点.

欧拉注意到, 对于一个可以“一笔画”画出的网络, 首先必须是连通的; 其次, 对于网络中的某个点, 如果不是起笔点或停笔点, 那么, 交汇于这样点的弧线必定成双成对, 即这样的点必定是偶点!

上述分析表明: 网络中的奇点, 只能作为起笔点或停笔点. 然而, 一个可以一笔画成的图形, 其起笔点与停笔点的个数, 要么为 0, 要么为 2. 于是, 欧拉得出了以下著名的“一笔画原理”:

“网络能一笔画画成必须是连通的, 而且奇点个数或为 0, 或为 2. 当奇点个数为 0 时, 全部弧线可以排成闭路.”

七桥问题的奇点个数为 4. 因而, 要找到一条经过七座桥, 但每座桥只走一次的路线是不可能的!

欧拉对“七桥问题”的研究是图论研究的开始, 同时也为拓扑学的研究提供了一个初等的例子. 欧拉的成果不应是单纯把它作为数学游戏, 重要的是应该知道他怎样把一个实际问题抽象成数学问题. 研究数学问题不应该为“抽象而抽象”, 抽象的目的是为了更好的、更有效的解决实际产生的问题, 欧拉对“七桥问题”的研究就是值得我们学习的一个样板.